

楕円体体積震源モーメントテンソル評価 のための Web 計算ツール

— 3つのモデルの順計算と逆計算：

(1) 膨張, (2) 流体移動, (3) 流体移動後の圧力回復—

水野尚人*・亀 伸樹**・市原美恵**

(2015年10月19日受付, 2016年1月15日受理)

Ellipsoidal Volume Source Calculation Webtool for Moment Tensor Evaluation of
Three Models: (1) Expansion, (2) Simple Movement of Magma and
(3) Pressure Recovery after Simple Movement

Naoto MIZUNO*, Nobuki KAME** and Mie ICHIHARA**

1. はじめに: 楕円体体積震源のモーメントテンソル と MTCR ダイアグラム

Mizuno *et al.* (2015) は, 2つの楕円体空隙間をマグマが移動する火山震源モデルを考えた. 圧力平衡と質量保存の流体力学的拘束条件を考慮して, その震源過程がモーメントテンソル (Moment tensor, MT) でどのように表現されるかを理論的に考察した. そこでは, 弾性体中にある1つの楕円体空隙が単純に膨張した際の体積震源の MT 表現 (Eshelby, 1957; Aki and Richards, 1980, 2002, 2004; Davis, 1986) の理論研究成果に基づき, 空隙間の流体力学相互作用の理論を展開している.

Mizuno *et al.* (2015) では, まず, 1つの楕円体の単純な膨張 (Expansion: EX) による MT の取り得る範囲を解析解 (Eshelby, 1957; Davis, 1986) を用いて MTCR ダイアグラム図 (Moment-tensor component-ratio diagram: Trasatti *et al.*, 2009, 2011; Amoruso and Crescentini, 2013) 上で示した上で, 2つの楕円体が膨張する場合の MT の取り得る範囲を MTCR ダイアグラム上で整理した (Fig. 1). これを既往研究で慣習的に用いられる3つの単純幾何形状の空隙 (Fig. 1の球 S: Sphere, 無限長の円柱 C: Cylinder, 亀

裂 P: Penny Shaped Crack) の MT の線形結合の取り得る範囲である三角形領域 SPC と比べると, 1つの EX 震源の MT の取り得る範囲 SXPXBS はこれより小さい範囲になり, 2つ以上の EX 震源のトータル MT の取り得る範囲は三角形領域 SPC となり慣習の範囲と一致する. これにより楕円体空隙が膨張する震源過程の MT の取り得る範囲が明確に限定された.

Mizuno *et al.* (2015) では, 次に, 2つの空隙間をマグマが単純に (マグマの弾性変形のみ考慮するという意味) 移動して圧力平衡に達するモデルを考えた (Simple Movement: SM). 高圧の楕円体から低圧の楕円体にマグマが移動した結果の2つの空隙のトータル MT を, マグマの体積弾性率 k_m が周辺岩石の体積弾性率 k より小さい場合 (3-2節) に, 楕円体形状の関数として理論式を導いた. まず, 特別な場合として高圧楕円体を球形状に限定して, 移動先の楕円体形状を変化させた場合の SM のトータル MT の取り得る範囲を MTCR 図上に整理したところ, EX の MT と全く重複しない別の領域となる大変興味深い結果を得た (Fig. 1の領域 PX'LDZB'X'P). この高圧球体 SM により楕円体体積震源の MT の取り得る

* 〒113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1
東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
Department of Earth and Planetary Science, Graduate
School of Science, The University of Tokyo, 7-3-1
Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan.

** 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1

東京大学地震研究所
Earthquake Research Institute, The University of Tokyo,
1-1-1 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan.

Corresponding author: Mie Ichihara
e-mail: ichihara@eri.u-tokyo.ac.jp

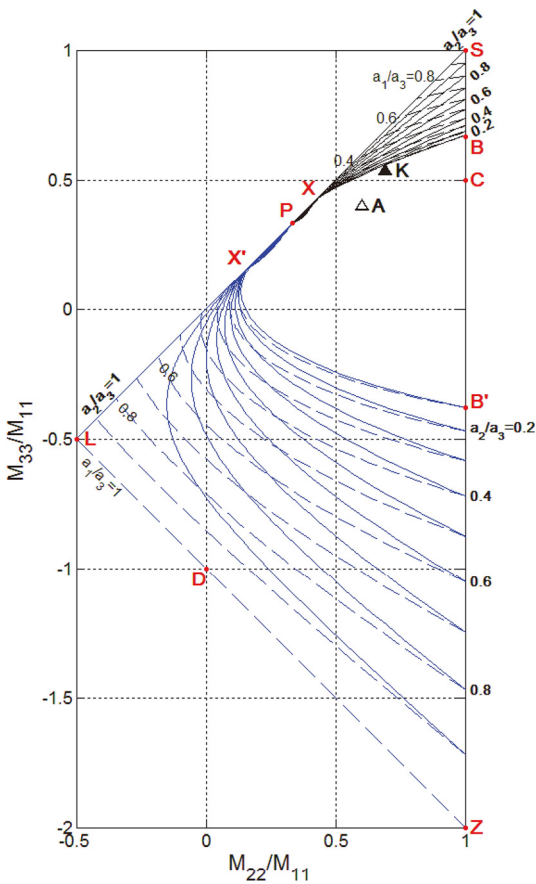


Fig. 1. MTCR diagram of the possible ranges of the MTCR for (i) an ellipsoidal volume source, EX: SXPXBS, (ii) simple magma movement, SM: PX'LDZB'X'P and (iii) pressure recovery, PR: Δ SLZ, where S, B, and P indicate the MTCR values for the expansion of a sphere, a prolate ellipsoid, and a penny-shaped crack, respectively, and C, D, and L are for the conventional cylinder model, the double couple, CLVD, respectively. X' and B' are the total MTs in SM from S to X and B, respectively, and Z indicates the corner position (1, -2). The aspect ratio of a_1/a_3 of an ellipsoid is varied along the solid contour lines for a constant a_2/a_3 as indicated by bold labels, while a_2/a_3 is varied along the dashed contour lines for a constant a_1/a_3 as indicated by normal labels. The representative values of observed moment tensor for the 1970 deformation at Kilauea, Hawaii (Davis, 1986), and that for VLP observed at Asama, Japan (Maeda, 2009; Maeda and Takeo, 2011), are shown by K with a solid triangle and by A with an open triangle, respectively. This figure is modified from figure 3 of Mizuno *et al.* (2015).

範囲が大幅に拡張された。任意の高圧楕円体形状の場合にもトータル MT の取り得る範囲を整理したところ、この高圧球体 SM の範囲からのずれは僅かであった (Mizuno *et al.*, 2015 の Fig. 3a 参照)。

しかしながら、観測データの MT は EX と SM から外れる範囲 (Fig. 1 の領域 BXPX'B'CB) に入るものも報告されている。Fig. 1 に示されたキラウエア火山の地殻変動 (Davis, 1986)、浅間山の長周期振動 (Maeda, 2009; Maeda and Takeo, 2011) の MT がその例である (Fig. 1 の K と A)。キラウエア火山の MT は複数 EX の範囲 (3-1 節の Δ SPC) には入っているが、浅間山の MT はいずれにも該当しない。Mizuno *et al.* (2015) では、浅間山の MT を説明するために高圧球体 SM を考えた後に更に圧力回復が起きるモデル (Pressure recovery: PR) を考えた。SM において高圧球体に起きる圧力低下に対してその何 % が回復するかを圧力回復率 $\Delta p'$ % として与えた場合、移動先楕円体の幾何形状と圧力回復率を用いてトータル MT が解析的に表現できる。PR は浅間山の MT の解釈に適用され、もっともらしい結果を得た。PR の取り得る範囲は、Fig. 1 の三角形領域 Δ SLZ となり EX と SM を完全に含む。また、この領域は MT の対角成分の和が非負の場合に取り得る MT 範囲でもある。

我々は、Mizuno *et al.* (2015) において MT の解析的表現が得られたこれらの 3 つのモデルに対して、誰でも簡単に MT を評価できるように Web 計算ツールを開発した。Mizuno *et al.* (2015) の解析的表現はいずれも、1 つの楕円体震源の単純膨張の解 (Eshelby, 1957; Davis, 1986) に依拠し、楕円積分が含まれる。我々の Web 計算ツールは、この楕円積分を意識することなく楕円体の形状を画面上にて入力するだけで MT 出力が得られる順計算、MT 入力に対して形状が得られる逆計算の両方に対応している。なお、Web 計算ツールは、SM では高圧球体のみを対象とし (3-2 節)、PR では圧力回復率を追加で入力する (3-3 節)。

この Web 計算ツールにより、地震波形データや地殻変動データの逆解析で得られた MT を楕円体震源モデルへ対応させることができる。火山震源過程の推定に役立てられることを願い、3 つの楕円体体積震源モデルに対応する Web 計算ツールの使い方をそれぞれ練習問題を変えながら説明する。

2. 楕円体体積震源 Web 計算ツール: 共通設計

我々の Web 計算ツールは、<http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/ichihara/mizuno/index.html> にて公開されている。まず最初に Fig. 2 (a) の画面が現れるので最上部のメニュー (Expansion (EX), Simple Movement (SM), Pressure Recovery

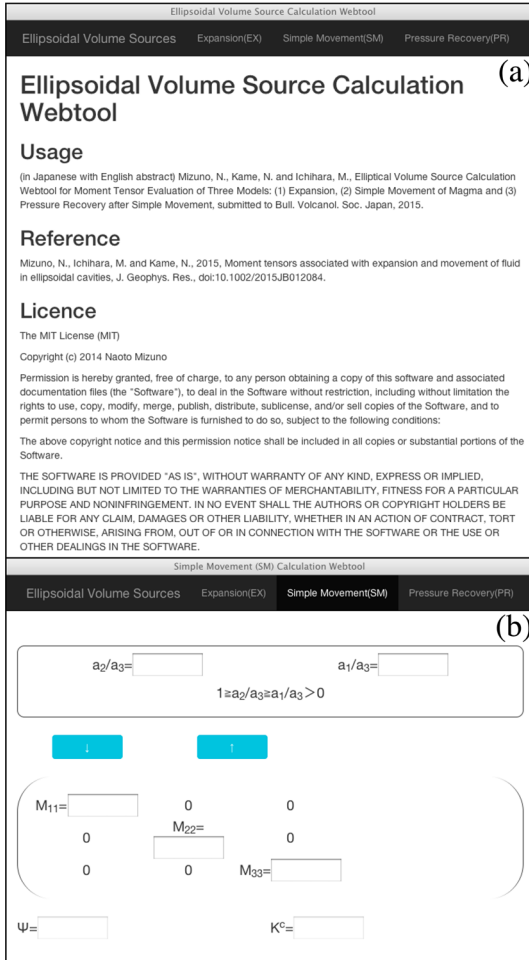


Fig. 2. Ellipsoidal volume source calculation webtool: (a) Display of the main menu, and (b) Display of ‘Simple Movement (SM)’ webtool.

(PR)) の3つから計算したいモデルを1つ選ぶ。

全てのモデルで1つの楕円体空隙の幾何形状が出入力に関係する。デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) を考え、楕円体は座標軸と平行な3軸 (a_1, a_2, a_3) を持つ。楕円体形状を入力してMTを出力することを順計算、MTを入力して楕円体形状を出力することを逆計算と呼ぶ。計算対象とするMTは、EXでは1つの楕円体のMTであり、SMとPRでは球体と楕円体のトータルMTである。

例として Fig. 2 (b) に SM Web 計算ツールの画面を示す。楕円体形状に関する独立情報は $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ の2つであり、この形状比の値を順計算の際に入力する $(1 \geq a_2/a_3 \geq a_1/a_3 > 0)$ とする。すると、楕円体の置かれた座標系でのMTの対角成分 (M_{11}, M_{22}, M_{33}) が M_{11} で規格化された比 (moment tensor component ratio, MTCR)

で $(1, M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11})$ の形で出力される。すなわち、MTの独立情報は $M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11}$ の2つである。楕円体形状 $(a_3 \geq a_2 \geq a_1)$ に対して一般的に $M_{11} \geq M_{22} \geq M_{33}$ となるが、MT成分の大きさが逆転する部分がわずかに存在し(領域XPとPX)この場合、MTCRダイアグラム上の点は $(M'_{22}/M_{11}, M'_{33}/M_{11}) \equiv (M_{33}/M_{11}, M_{22}/M_{11})$ に取り直して、常に $M'_{22}/M_{11} \geq M'_{33}/M_{11}$ (ダイアグラム右下) に点をプロットする仕様になっている。

逆計算では (M_{11}, M_{22}, M_{33}) の対角3成分を大きい順 $(M_{11} \geq M_{22} \geq M_{33})$ に入力すると、楕円体の幾何形状 $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ が出力される。上記のMT成分の逆転領域では、逆転が考慮され常に $a_2/a_3 \geq a_1/a_3$ で出力される。順計算と逆計算ともに2つの数字の入力に対して2つの数字が出力される。なお、PRでは圧力回復率 $\Delta p'(\%)$ (3-3節)を追加で指定する必要がある。

Web 計算ツールでは楕円体形状に依存する特徴的な2つの量 $\Psi = \Delta V^C / \Delta V^T$ と $K^C = k^{ellip} / k$ が同時に表示される。ここで、 ΔV^T は応力ゼロ歪みによる楕円体の体積変化、 ΔV^C は実際の体積変化、 k は媒質の体積弾性率、 $k^{ellip} \equiv \Delta P / (\Delta V^C / V)$ は楕円体空隙の実効的な体積弾性率、 ΔP は圧力変化、 V は楕円体体積である。 ΔV^T は体積震源のモーメントテンソルに現れる仮想的体積変化であり、 K^C は楕円体震源の体積変化に対する実効的圧力変化の指標である。最近、体積震源のMT表現において ΔV^C ではなく ΔV^T が現れる必然性について表現定理の観点から説明された (Ichihara *et al.*, 2016; 日下部・他, 2016)。なお、EXツールのみの付録機能として、計算結果のMTのMTCRダイアグラム $(M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11})$ 上での位置情報と楕円体の断面形状が表示される。

3. 各 Web 計算ツールの使用法と練習問題

3-1 Expansion (EX) : 楕円体の膨張モデル

1つの楕円体空隙の膨張モデルによるMT計算には Fig. 2(a) のメニュー画面から Expansion (EX) を選ぶ。EXのWeb計算ツール画面において楕円体形状 $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ を入力して下向き ↓ をクリックすると EX の MT $(1, M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11})$ が計算される (順計算)。逆に、 (M_{11}, M_{22}, M_{33}) を入力して上向き ↑ をクリックすると楕円体形状 $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ が計算される (逆計算)。楕円体の幾何形状に対応する Ψ と K^C の値が表示される。

逆計算における入力成分の大小順序は $M_{11} \geq M_{22} \geq M_{33}$ とする。これを満たさない場合は、↑ボタンが赤色となりエラーであることを示す。また、MTCRダイアグラム上で SXPXBS 領域に入っていない MTCR を入力しても、↑ボタンが赤色となりエラーであることを示す。

Web 計算ツールを使わなくても、楕円体形状と MTCR

の関係は MTCR ダイアグラム上の等値線の値により示されており (Fig. 1), 概数はダイアグラムのみを用いて読み取ることが出来る. 領域 SXPXBS において, 実線は $a_2/a_3 = \text{const}$, 点線は $a_1/a_3 = \text{const}$ の等値線を表している. 例えば, $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ の値を決めたなら, それぞれの値に近い等値線の交点を探す. そこが対象とする楕円体膨張震源の MTCR である. 楕円体形状を示す $a_2/a_3 = \text{const}$. と $a_1/a_3 = \text{const}$. の等値線が集まる領域 XP 付近は, モーメントテンソルを楕円体震源と対応させる際に特に注意が必要となる領域である. ここでは, 形状が大きく変化しても MTCR はほとんど変化しない. すなわち, MTCR から形状を求めることが非常に困難な領域である.

3-1-1 Exercise EX1

モーメントテンソル解析から $M_{11} = 4.00 \times 10^{17}$, $M_{22} = 2.80 \times 10^{17}$, $M_{33} = 2.40 \times 10^{17}$ (単位 N m) の値が決定されたとする. このとき, 適切な Web 計算ツールを選び, 楕円体形状と体積変化を求めてみよう.

MTCR が $(2.80/4.00, 2.40/4.00) = (0.700, 0.600)$ と MTCR ダイアグラム (Fig. 1) における領域 SXPXBS にあるので EX Web 計算ツールを選び, $M_{11} = 4.00$, $M_{22} = 2.80$, $M_{33} = 2.40$ を入力する. 逆計算機のボタン ↑ をクリックすると $a_2/a_3 = 0.459$, $a_1/a_3 = 0.294$, $\Psi = 0.617$, $K^C = 0.621$ となる. 楕円体の形状は EX Web 計算ツールの数字が答となる.

実際の体積変化 ΔV^C を求めるには, 仮想的体積変化 ΔV^T と MT の対角成分の総和の関係式

$$M_{ii} = 3k\Delta V^T, \quad (1)$$

を用いる (Mizuno *et al.*, 2015). ここで k は媒質の体積弾性率である. これと $\Psi (= \Delta V^C / \Delta V^T)$ の値を組み合わせると, 実際の体積変化

$$\Delta V^C = \frac{M_{ii}}{3k} \Psi = \frac{(M_{11} + M_{22} + M_{33})}{3k} \Psi, \quad (2)$$

となる. $k = 20 \text{ GPa}$ とすると Eq. (2) より $\Delta V^C = (4.00 + 2.80 + 2.40) \times 10^{17} \times 0.617 / (3 \times 20 \times 10^9) \sim 0.946 \times 10^7 \text{ m}^3$ となる. これは東京ドームの体積 $1.2 \times 10^7 \text{ m}^3$ のおよそ 3/4 に相当する.

3-1-2 2つの楕円体膨張と MTCR ダイアグラム上の内分点の関係

主軸の向きの揃った2つの楕円体 (楕円体1と楕円体2) が, 共通の過剰圧 ΔP を受けて膨張する場合を考えよう. 楕円体1に関する量を上添え字無しで, 楕円体2に関する量を上添え字'付きで, 両者のトータルを上添え字 *tot* 付きで表わす. それぞれの MT の成分 (M_{11}, M_{22}, M_{33}) と ($M'_{11}, M'_{22}, M'_{33}$) は, 同じ方向の成分とし, また, $M_{11} \geq M_{22} \geq M_{33}$, および $M'_{11} \geq M'_{22} \geq M'_{33}$ とする. MT

成分の大小が入れ替わる領域 XP では, MT 成分を共通設計に従い並べ替える.

MTCR ダイアグラム上での, トータル MT の位置は, それぞれの要素の MTCR ダイアグラム上の点 (M_{22}/M_{11} , M_{33}/M_{11}) と (M'_{22}/M'_{11} , M'_{33}/M'_{11}) とを結ぶ線分を, $M'_{11} : M_{11}$ で内分した点になる. これは, $M_{22}^{tot}/M_{11}^{tot}$ について,

$$\begin{aligned} \frac{M_{22}^{tot}}{M_{11}^{tot}} &= \frac{M_{22} + M'_{22}}{M_{11} + M'_{11}} \\ &= \frac{M_{11}}{M_{11} + M'_{11}} \frac{M_{22}}{M_{11}} + \frac{M'_{11}}{M_{11} + M'_{11}} \frac{M'_{22}}{M'_{11}}, \end{aligned} \quad (3)$$

であり, また $M_{33}^{tot}/M_{11}^{tot}$ についても明らかに同じことが言えるからである. さて, この分割比 $M'_{11} : M_{11}$ が何に依存しているかを Mizuno *et al.* (2015) に沿って考えてみよう.

楕円体1と楕円体2の MT の値に対して, MTCR ダイアグラム上の位置が決まり,

$$\alpha = 1 + \frac{M_{22}}{M_{11}} + \frac{M_{33}}{M_{11}}, \quad \alpha' = 1 + \frac{M'_{22}}{M'_{11}} + \frac{M'_{33}}{M'_{11}}, \quad (4)$$

の値がそれぞれ確定する. 一方, ΔV^T , ΔP , および, $\Delta V^{T'}$ と $\Delta P'$ の関係 (Eq. (1), および, Ψ と K^C の定義式) から

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3k\Delta V^T}{M_{11}} = \frac{3V}{\Psi K^C} \frac{\Delta P}{M_{11}}, \\ \alpha' &= \frac{3k\Delta V^{T'}}{M'_{11}} = \frac{3V'}{\Psi' K^{C'}} \frac{\Delta P'}{M'_{11}}, \end{aligned} \quad (5)$$

の関係式が得られる.

次に, 上の議論を共通の過剰圧 $\Delta P = \Delta P'$ を持つ2つの楕円体のそれぞれの MT に適用すると,

$$\frac{M'_{11}}{M_{11}} = \frac{V'}{V} \frac{\Psi K^C}{\Psi' K^{C'}} \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad (6)$$

あるいは,

$$\frac{V'}{V} = \frac{M'_{11}}{M_{11}} \frac{\Psi' K^{C'}}{\Psi K^C} \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad (7)$$

となる. これは, 内分点の位置は, 楕円体の形状だけで決定される量の比 Ψ'/Ψ , $K^{C'}/K^C$, α'/α に加えて, 体積比 V'/V が重要になることが分かる (Mizuno *et al.*, 2015). $V' \gg V$ とすると, 小さい方の楕円体が薄いクラック ($K^{C'} \gg K^C$) の場合を除き $M_{11}' \geq M_{11}$ となるので, 内分点は (M'_{22}/M'_{11} , M'_{33}/M'_{11}) の方に引張られる.

以上のことから, 1つの楕円体の膨張の MT は MTCR ダイアグラムにおいて領域 SXPXBS しか取り得ないが, 2つの楕円体の膨張を考えるとそれらの主軸の向きが揃っている場合には, 三角形領域 ΔSPB の任意の値を取

り得る。また、軸の回転も含めると、三角形領域 Δ SPC の任意の値を取り得る (Mizuno *et al.*, 2015)。ただし、個々の楕円体の形状については任意性があり、MTCR ダイアグラム上の 1 点の位置情報から形状を一意に決めることはできない。

3-1-3 Exercise EX2

Davis (1986) によって決められた Kilauea 火山の体積震源の MTCR は K(0.691, 0.535) であった。これは、単一の楕円体の膨張では説明できない領域にある。これを、MTCR 値 (1, 2/3) を持つ細長い楕円体 B と、領域 XP にある薄い楕円体の組み合わせで考えてみよう。

例えば、B(1, 2/3) と K(0.691, 0.535) を通る直線を延長すると (0.420, 0.4195) を通る (この付近は等値線が集まってくる領域であり、0.4195 の数値だけ有効数字が 4 桁に選んだ。例えば、これを 0.420 に丸めると全く異なる楕円体形状になる)。この点を P₁ とする (Fig. 3a)。P₁ の楕円体形状を EX Web 計算ツールを用いて求めると、 $a_2/a_3=0.562$, $a_1/a_3=0.141$, $\Psi=0.776$, $K^C=0.289$ となる。また、 $\alpha=1.84$ である。一方、B に対しては、 $\Psi'=0.625$, $K^{C'}=0.600$, $\alpha'=2.67$ と求められる。K は線分 BP₁ を 0.533 : 0.467 に内分する点である ($1 \times 0.467 + 0.420 \times 0.533 = 0.691$, $2/3 \times 0.467 + 0.4195 \times 0.533 = 0.535$)。すなわち、B と P₁ の楕円体の MT の最大成分をそれぞれ M'_{11} と M_{11} とすると、 $M'_{11}/M_{11} = 0.467/0.533$ である。Eq. (7) から、

$$\frac{V'}{V} = \frac{0.467}{0.533} \frac{0.625 \times 0.600}{0.776 \times 0.289} \frac{2.67}{1.84} = 2.13, \quad (8)$$

と、2 つの楕円体の体積比が決められる。

これに対して、K を B₂(1.00, 0.711) と P₂(0.367, 0.350) を 0.488 : 0.512 に内分する点とを考えてみよう (Fig. 3b)。P₂ は、軸の長さが $a_2/a_3=0.0833$, $a_1/a_3=0.0112$ の細い棒状で、 $\Psi=0.895$, $K^C=0.117$, $\alpha=1.72$ である。一方、B₂ は、軸の長さの比が $a_2/a_3=a_1/a_3=0.310$ の卵形で、 $\Psi'=0.597$, $K^{C'}=0.675$, $\alpha'=2.71$ が得られる。これらの値から、

$$\frac{V'}{V} = \frac{0.512}{0.488} \frac{0.597 \times 0.675}{0.895 \times 0.117} \frac{2.71}{1.72} = 6.36, \quad (9)$$

となる。

ここで取り上げた 2 つの場合のように、1 つの MTCR に対して、形状や体積比の大きく異なる組み合わせで観測値が説明できることになる。

3-2 Simple Movement (SM): マグマの単純移動モデル

高圧の球体から低圧の楕円体へのマグマ移動モデルによる MT 計算には、Fig. 2(a) のメニュー画面から Simple

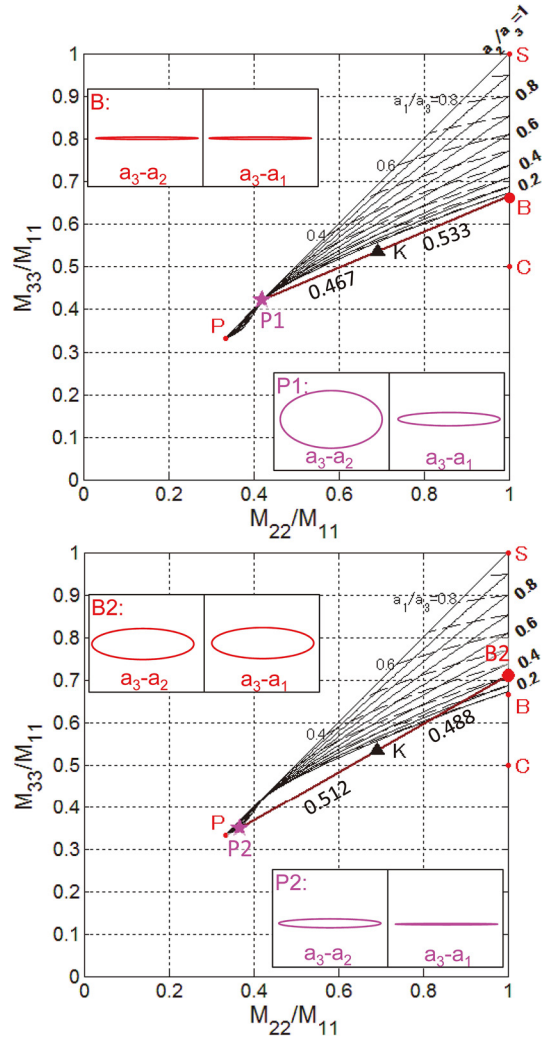


Fig. 3. Supplemental plots on MTCR diagram for Exercise EX2, determining Kilauea point K by EX: (a) Case with an ellipsoid of B (1, 2/3) as a starting MTCR point, (b) Case with an ellipsoid of B₂ (1.00, 0.711) as a starting MTCR point. The corresponding goal points P₁ and P₂, and the aspect ratio of each ellipsoid are also shown. Contour lines and symbols are shown as similar to Fig. 1.

Movement (SM) を選ぶ。SM の Web 計算ツールの画面 (Fig. 2 (b)) が現れるので、楕円体形状 (a_2/a_3 , a_1/a_3) を入力して下向き ↓ をクリックすると SM モデルの ($1, M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11}$) が計算される (順計算)。一方、(M_{11}, M_{22}, M_{33}) を入力して上向き ↑ をクリックすると楕円体形状 (a_2/a_3 , a_1/a_3) が計算される (逆計算)。逆計算では、MTCR 入力値が SM の MT の取り得る範囲である領域 PX'LDZB'X'P (Fig. 1) に入っていない場合は ↑ が赤色とな

りエラーであることを示す。計算結果は、楕円体の Ψ と K^C の値と共に表示される。

EX モデルの場合と同様に、Web 計算ツールを使わなくても、Fig. 1 の MTCR ダイアグラム上に引かれた楕円体形状の等値線により概数がわかるようになっている。領域内部の実線と点線は、移動先の膨張する楕円体形状の $a_2/a_3 = \text{const.}$ と $a_1/a_3 = \text{const.}$ の等値線をそれぞれ表している。 $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ の値を決めたなら、それぞれの値に近い等値線の交点を探す。そこが対象とする SM のトータル MT の MTCR である。楕円体形状を示す $a_2/a_3 = \text{const.}$ の等値線が集まってくる領域 PX' 付近は、モーメントテンソルから楕円体形状を決定することが困難な領域である。

3-2-1 マグマ単純移動モデル (SM) の図学的理解

SM モデルではマグマ移動により高压の球体は収縮し、低压の楕円体は膨張し圧力が釣り合う。以下、高压の球体に関する量を上添え字'付きで、低压の楕円体は上添え字無しで表す。

SM モデルで注意すべきことは、球体の収縮量の絶対値 ($|\Delta V^{C'}$) と楕円体の膨張の絶対値 ($|\Delta V^C|$) は、必ずしも同じ値にならないことである。まず、このことについて考えてみよう。Mizuno *et al.* (2015) は、移動後の圧力平衡と、マグマの圧縮性を考慮した質量保存から、以下の関係を導いた。

$$\left| \frac{\Delta V^{T'}}{\Delta V^T} \right| = \frac{\frac{kK^C}{k_m} + 1}{\frac{kK^{C'}}{k_m} + 1} \frac{\Psi}{\Psi'} = A. \tag{10}$$

真の体積変化が $|\Delta V^{C'}/\Delta V^C| = |\Delta V^{T'}/\Delta V^T| \times (\Psi'/\Psi)$ であることを思い起こすと、 $|\Delta V^{C'}| = |\Delta V^C|$ となるのは、Eq. (10) において、 $k_m \gg k$ のとき、又は、 $K^{C'} = K^C$ の場合であることが分かる。マグマと周辺岩石の体積弾性率を考えると、 $k_m \ll k$ の方が適当であり、本 Web 計算ツールもこれを仮定している。また、球体と同じ値の K^C を持つ楕円体形状は球体以外になく、球体から球体への流体の移動は、MT 自体が符号を反転して等しくなり、重ね合わせると 0 となる。すなわち点震源として捉えた場合には、意味のないものになってしまう。

次に、体積震源を特徴づける量である MT の対角成分の和 (M_{ii}) について考えてみよう。MT の各要素 $M_{ij}|_{i=j}$ を決めるのは、 $\Delta V^{T'}$ と ΔV^T である。本 Web ツールでは、 $k_m \ll k$ を仮定したが、この時 Eq. (10) から $\Delta V^{T'}$ と ΔV^T の比は

$$\left| \frac{\Delta V^{T'}}{\Delta V^T} \right| = \frac{K^C}{K^{C'}} \frac{\Psi}{\Psi'} = A, \tag{11}$$

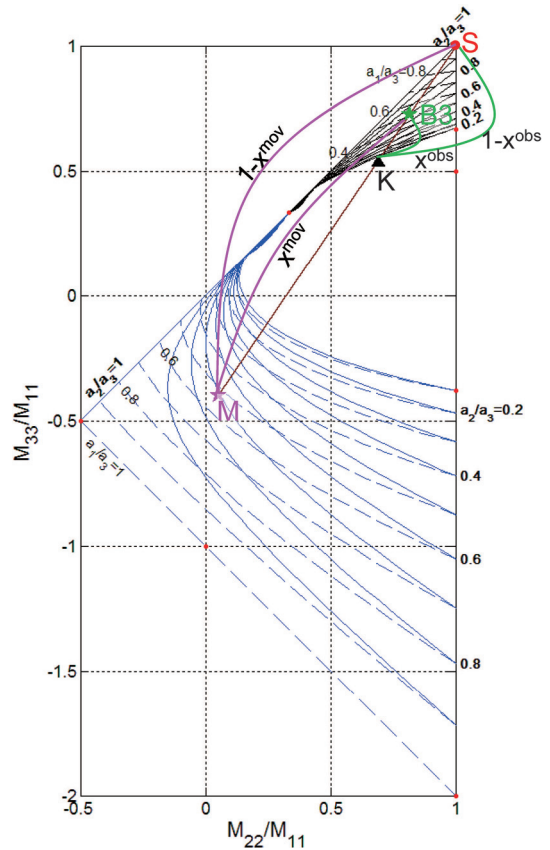


Fig. 4. A supplemental plot on MTCR diagram for Exercise PR, determining Kilauea point K by PR. M and B₃ indicate the MTCR values for an ellipsoid considered in SM and EX, respectively. Contour lines and symbols are shown as similar to Fig. 1.

となり、それぞれの体積とは関係なく、それぞれの幾何形状のみで決まる。この性質を用いて、Fig. 1 において SM の MT を決定することができる。

Mizuno *et al.* (2015) は、マグマの単純移動モデル (SM) における球体と楕円体のトータル MT の MTCR 値を、MTCR ダイアグラムから図学的に求める方法を提案している。球体膨張と楕円体膨張の MTCR ダイアグラム上での位置をそれぞれ S、B₃ であるとする。マグマの移動により球体の収縮と楕円体の膨張のトータル MT の MTCR 上の位置 (M) は、SM : MB₃ = 1 - x^{mov} : x^{mov} の外分点になる (Fig. 4)。x^{mov} は負の値で以下の式で与えられる (Mizuno *et al.*, 2015)。

$$x^{mov} = \frac{A^{mov}/F}{1+A^{mov}/F}, \quad F = -\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{3}{\alpha},$$

$$A^{mov} = \frac{\Psi K^C}{\Psi' K^{C'}} = \frac{9}{4} \Psi K^C. \quad (12)$$

ここで高圧球体の値 $\Psi' = 5/9$ と $K^{C'} = 4/5$ を用いたが、一般的な高圧楕円体形状に対しても Eq. (12) の3つの値は全て形状だけで決まり、それぞれの容器の大きさによらない。また、移動によるトータル MT の M_{ii} が与えられると、高圧側の収縮量 $|\Delta V^{C'}|$ と、低圧側の膨張量 $|\Delta V^C|$ も形状のみから決まることは、Exercise SM1 に示すとおりである。

一方で、高圧側と低圧側の圧力変化比については、それぞれの容器の大きさの比が効いてくる。Mizuno *et al.* (2015) は、質量保存と圧力平衡から関係式

$$\frac{|\Delta P'|}{|\Delta P|} = \frac{V}{V'} \left(\frac{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{kK^C}}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{kK^{C'}}} \right), \quad (13)$$

を得ている (Mizuno *et al.* (2015) の Eq. (37) を変形)。 $k_m \ll k$ の場合、薄い亀裂 (K^C が非常に小さい) を含まない限り、上の式の () 内は 1 で近似でき、 $|\Delta P'|/|\Delta P| \sim V/V'$ となる。楕円体形状の変化に対して、こうして決定された外分点の位置を結んだものが Fig. 1 において MTCR ダイアグラムの SM 範囲に示された等値線である。

なお、CLVD (Fig. 1 の L) のように、 $M_{ii} \sim 0$ であるような MT は、流体移動を表わすと解釈されることが多いが、実際には同じ形状間、あるいは特定の形状のセットの間の流体移動でなければ、 $M_{ii} \sim 0$ を満たすことができないことをここに強調しておく。

3-2-2 Exercise SM1

モーメントテンソル逆解析から $M_{11} = 4.00 \times 10^{17}$, $M_{22} = 0.620 \times 10^{17}$, $M_{33} = -2.80 \times 10^{17}$ (単位 N m) の値が決定されたとする。このとき、適切な Web 計算ツールを選び、楕円体の形状と体積変化を求めてみよう。

MTCR が (0.620/4.00, -2.80/4.00) = (0.155, -0.700) と MTCR ダイアグラム (Fig. 1) における SM の範囲にあるので SM Web 計算ツールを選ぶ。Web 計算ツールに $M_{11} = 4.00$, $M_{22} = 0.620$, $M_{33} = -2.80$ を入力する。↑ をクリックすると $a_2/a_3 = 0.796$, $a_1/a_3 = 0.694$, $\Psi = 0.563$, $K^C = 0.777$ を得る。マグマ移動先の楕円体形状についてはこの数字が答となる。

仮想的体積変化を $\Delta V^T (< 0)$ と $\Delta V^{T'} (> 0)$ とすると、トータル MT の対角成分の総和の関係式は、

$$M_{ii} = 3k(\Delta V^{T'} + \Delta V^T) = 3k\Delta V^T(1-A), \quad (14)$$

$$A = \frac{\Psi K^C}{\Psi' K^{C'}} = \frac{9}{4} K^C \Psi, \quad (15)$$

となり (Mizuno *et al.*, 2015), 膨張と収縮で打ち消し合うことに注意する。これを Web 計算ツールの値を組み合わせると、

$$A = \frac{9K^C\Psi}{4} = \frac{9}{4} \times 0.563 \times 0.777 = 0.984, \quad (1-A) = 0.016, \quad (16)$$

$$M_{ii} = (4.00 + 0.620 - 2.80) \times 10^{17} = 1.82 \times 10^{17}, \quad (17)$$

$$\Delta V^T = \frac{M_{ii}}{3k(1-A)} = \frac{1.82 \times 10^{17}}{60 \times 10^9 \times 0.016} = 1.90 \times 10^8 \text{ m}^3, \quad (18)$$

$$\Delta V^{T'} = -A\Delta V^T = -1.87 \times 10^8 \text{ m}^3, \quad (19)$$

$$\Delta V^C = \Psi\Delta V^T = 0.563 \times 1.90 \times 10^8 = 1.07 \times 10^8 \text{ m}^3, \quad (20)$$

$$\Delta V^{C'} = \Psi'\Delta V^{T'} = \frac{5}{9} \times (-1.87) \times 10^8 = -1.04 \times 10^8 \text{ m}^3, \quad (21)$$

となる。

Exercise EX1 では、 $\Delta V^C = 0.946 \times 10^7 \text{ m}^3$ であった。Exercise SM1 ではマグマ移動による体積変化 ($\Delta V^C = 1.07 \times 10^8 \text{ m}^3$ と $\Delta V^{C'} = -1.04 \times 10^8 \text{ m}^3$) が 10 程度生じているにも関わらず、両者は打ち消し合い、トータル MT における $M_{ii} = 1.82 \times 10^{17} \text{ N m}$ は Exercise EX1 の $M_{ii} = 9.20 \times 10^{17} \text{ N m}$ より小さいことに注意する。

3-2-3 Exercise SM2: Double couple

以上を踏まえて、注意すべき問題として、ダブルカップル (Fig. 1 の D) のモーメントテンソルを入力して逆解析を行ってみる。モーメントテンソル逆解析から $M_{11} = 1.00 \times 10^{17}$, $M_{22} = 0.00 \times 10^{17}$, $M_{33} = -1.00 \times 10^{17}$ (単位 N m) の値が決定されたとする。このとき、適切な Web 計算ツールを選び、楕円体形状と体積変化を求めてみよう。

MTCR が (0.00, -1.00) と MTCR ダイアグラム (Fig. 1) における SM の範囲にあるので SM Web 計算ツールを選び、 $M_{11} = 1.00$, $M_{22} = 0.00$, $M_{33} = -1.00$ を入力する。↑ ボタンをクリックすると赤色となりエラーであることを示す。これは、球体収縮側と楕円体膨張側の MT を足し合わせると 0 となる場合は、楕円体が球形状以外になく、 $M_{ii} \sim 0$ となる場合は直線 LDZ 上で実現し得ないからである。SM ツールにおいては CLVD の MT を含み $M_{ii} \sim 0$ となる場合は全てエラーとなる。

Web 計算ツールの対象外であるが、コイン状の薄いクラックから、それに直交する同じ形状のクラックに流体

が移動する場合には、意味のあるダブルカップル解を得ることができる (Mizuno *et al.*, 2015). 例えば、高圧側 (収縮側) の MT が $(M'_{11}, M'_{22}, M'_{33}) = (-1, -1/3, -1/3)$ 、低圧側 (膨張側) が $(M_{11}, M_{22}, M_{33}) = (1/3, 1, 1/3)$ であるような場合を考えれば、自明であるだろう。

3-3 Pressure recovery (PR): マグマ移動後に圧力回復するモデル

SM の後に圧力回復する PR モデルの MT 計算には、Fig. 2 (a) のメニュー画面から Pressure Recovery (PR) ツールを選ぶ。PR の Web 計算ツールにおいては順計算と逆計算の両方の場合に圧力回復率 $\Delta p'$ の値 (3-3-1 節) を追加で入力する必要がある。 $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ と $\Delta p'$ を入力して下向き ↓ をクリックすると PR の MTCR $(1, M_{22}/M_{11}, M_{33}/M_{11})$ が計算される (順計算)。逆に、 (M_{11}, M_{22}, M_{33}) と $\Delta p'$ を入力して上向き ↑ をクリックすると $(a_2/a_3, a_1/a_3)$ が計算される (逆計算)。計算結果は、楕円体の Ψ と K^C の値と共に表示される。PR ツールの対象となるのは MTCR ダイアグラムにおける $M_{ii} \sim 0$ を除く三角形領域 SLZ 全体である。

3-3-1 マグマ移動後に圧力回復するモデル (PR) の図学的理解

SM の後 (Fig. 4 の M)、両方の容器 (Fig. 4 の S と B_3) が圧力平衡を保ちながら増圧する場合を考える。PR の最終的なトータル MTCR 値を R とすると、R は、0% の圧力回復の場合には M と同じ位置となる。100% の圧力回復 (高圧球体が元の圧力に戻る) の場合には、実質的には低圧楕円体の膨張の寄与しか見られないので、 B_3 の位置になる。より一般的に、0 から 100% の圧力回復に対して R は直線 MB_3 上を M から B_3 に移動することが示される (Mizuno *et al.*, 2015)。100% を超えると、直線 B_3S 上において S に近づく。

Mizuno *et al.* (2015) は、移動の場合と同じように、外分比 $SR : RB_3 = 1 - x^{obs} : x^{obs}$ と、 A^{obs} の関係について、Eq.(12) の、 x^{mov} と A^{mov} の関係が成り立つことを利用し、

$$\frac{A^{obs}}{A^{mov}} = \frac{\frac{\Delta P^{rec}}{\Delta P'} + 1}{\frac{\Delta P^{rec}}{\Delta P} + 1}, \quad (22)$$

の関係を導いた。ここで、 ΔP^{rec} は圧力回復値であり、 $\Delta p' = \Delta P^{rec} / |\Delta P'|$ を百分率で表したものを $\Delta p'$ と定義する。高圧の球体の体積が、低圧の楕円体の体積よりも十分に大きい時 ($V/V' \rightarrow 0$)、Eq. (13) より $|\Delta P^{rec}| < |\Delta P'| \ll \Delta P$ であり、Eq. (22) の右辺分母は、1 で近似できる。PR Web 計算ツールでは、この近似を使うことにする。

3-3-2 Exercise PR

Exercise EX2 と同じ Kilauea の MTCR の $K(0.691,$

0.535) を、PR モデルで説明することを試みる。この場合にも、不確定性は多分にあるが、Web 計算ツールの適用範囲内で考える。即ち、高圧側の容器は球体で、その体積は低圧側の楕円体容器よりも十分に大きく、マグマの体積弾性率 k_m は周囲弾性体の k よりも十分に小さい。

Fig. 2 (a) のメニュー画面において Pressure Recovery を選び、PR Web 計算ツールに $M_{11} = 1.00$, $M_{22} = 0.691$, $M_{33} = 0.535$ を入力する。圧力回復を $\Delta p' = 50.0\%$ と入力すると、楕円体の形状が $a_2/a_3 = 0.686$, $a_1/a_3 = 0.511$ となる。この形状の楕円体が膨張する場合の MTCR は、 $B_3(0.814, 0.721)$ であることが、EX Web 計算ツールによって計算される。さらに、この形状を SM Web 計算ツールに入れて計算すると、行き先の MTCR は、 $M(0.0712, -0.396)$ となる。SMB₃ の位置より外分比 $x^{mov} = -3.99$ であり、Eq. (12) の第 1 式と第 2 式より、 $A^{mov} = 0.9466$ となる。また、 B_3 の楕円体に対して計算された、 $\Psi = 0.579$, $K^C = 0.727$ を Eq. (12) の第 3 式 $A^{mov} = \frac{9}{4} \Psi K^C$ に代入しても A^{mov} が同じ値が得られ、計算が正しく行われていることが確かめられる。

K を、SB₃ の外分点として見たときの分割比は $x^{obs} = -0.661$ である。対応する $A^{obs} = 0.471 \sim A^{mov}/2$ となっており、Eq. (22) より 50% の圧力回復を与えたことと整合的な結果が得られている。

4. まとめ

我々は Mizuno *et al.* (2015) において考察された楕円体空隙に関係する 3 つの体積震源モデル (膨張: EX, マグマの単純移動: SM, 単純移動後の圧力回復: PR) の MT を評価する Web 計算ツールを作成した。楕円体の形状を入力すると MTCR 出力を得られる順計算、MTCR を入力すると楕円体形状が出力される逆計算がそれぞれ可能である (PR では圧力回復率を追加で入力する)。結果は Ψ と K^C と共に画面に表示される。Web 計算ツールは誰にでも簡単に使ってもらえることを目指した。地震波形データや地殻変動データの逆解析から得られた MT に対して、この Web 計算ツールを適用して火山震源過程の解釈に役立てて欲しい。

Web 計算ツールのプログラムは著作権フリーである。Web 計算ツールトップページ (Fig. 2) を参照されたい。組み込まれている楕円積分に関しては Mizuno *et al.* (2015) の Appendix に詳しく説明されている。興味がある方はそちらも参照してほしい。

謝 辞

日下部哲也氏との議論は大変有用でした。本稿の改訂にあたり匿名の査読者 1 名、および編集委員の橋本武志

氏のコメントは非常に有意義でした。記して感謝いたします。N.K. は JSPS 科研費 #21107007, および文部科学省による「災害の軽減に貢献するための地震火山観測研究計画」の助成を受けました。

引用文献

- Aki, K. and Richards, P. G. (1980) **Quantitative Seismology 1st ed.** Freeman, New York, 57-60 p.
- Aki, K. and Richards, P. G. (2002) **Quantitative Seismology 2nd ed.** University Science Books, Sausalito, 53-58 p.
- 安芸敬一・リチャーズ, P.G. (上西幸司・亀 伸樹・青地 秀雄 訳) (2004) 地震学 定量的アプローチ. 古今書院, 東京, 69-76 p.
- Amoruso, A. and Crescentini, L. (2013) Analytical models of volcanic ellipsoidal expansion sources. *Ann. Geophys.*, **56**, doi: 10.4401/ag-6441.
- Davis, P. M. (1986) Surface deformation due to inflation of an oriented triaxial ellipsoidal cavity in an elastic half-space, with reference to Kilauea volcano, Hawaii. *J. Geophys. Res.*, **91**, 7429-7438.
- Eshelby, J. D. (1957) The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **241**, 376-396.
- Ichihara, M., Kusakabe, T., Kame, N. and Kumagai, H. (2016) On volume source representations based on the representation theorem. *Earth Planets Space*, doi 10.1186/s40623-016-0387-3.
- 日下部哲也・亀 伸樹・市原美恵・熊谷博之 (2016) 表現定理とグリーン関数 (2) 一体積震源のモーメントテンソル表現一. *地震*, **68**, 169-176, doi: 10.4294/zisin.68.169.
- Maeda, Y. (2009) Very-long-period pulses at Asama volcano inferred from dense seismic observation. Ph.D. thesis, The University of Tokyo.
- Maeda, Y. and Takeo, M. (2011) Very-long-period pulses at Asama volcano, central Japan, inferred from dense seismic observations. *Geophys. J. Int.*, **185**, 265-282.
- Mizuno, N., Ichihara, M. and Kame, N. (2015) Moment tensors associated with the expansion and movement of fluid in ellipsoidal cavities. *J. Geophys. Res.*, doi: 10.1002/2015JB012084.
- Trasatti, E., Cianetti, S., Giunchi, C., Bonafede, M., Agostinetti, N.P., Casu, F. and Manzo, M. (2009) Bayesian source inference of the 1993-1997 deformation at mount Etna (Italy) by numerical solutions. *Geophys. J. Int.*, **177**, 806-814.
- Trasatti, E., Bonafede, M., Ferrari, C., Giunchi, C. and Berrino, G. (2011) On deformation sources in volcanic areas: modeling the Campi Flegrei (Italy) 1982-84 unrest. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **306**, 175-185.

(編集担当 橋本武志)